Programme de colle n°2

semaine du 22 au 26 septembre

Notions vues en cours

Chapitre 3 : Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

- Inégalités : transitivité, règles pour les additionner, les multiplier par un réel, pour appliquer une fonction aux deux membres de l'inégalité (selon la monotonie, éventuellement stricte, de cette fonction)
- Vu en TD et sur des exemples : résolution d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}$: la méthode privilégiée est par équivalences successives avec éventuellement des disjonctions de cas (et non l'analyse-synthèse)
- Valeur absolue : définition, interprétation $|x| = \max(x, -x)$, propriétés évidentes, identités $\sqrt{a^2} = |a|$ et $\sqrt{a}^2 = a$, première et seconde inégalité triangulaire
- Distance entre réels : définition, interprétation géométrique de $|x - a| \leq \varepsilon$
- Vu en TD et sur des exemples : résolution d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}$ avec des valeurs absolues.
- Partie entière d'un réel x : définition, notation $\lfloor x \rfloor$, croissance de la partie entière, caractérisations, règle $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Chapitre 4 : Somme et produits

- Sommes et produits de réels $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n$: notations $\sum_{i=m}^{n} a_i$ et $\prod_{i=m}^{n} a_i$, l'indice de sommation est une variable muette
- Famille $(a_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble I (dans ce chapitre, on supposera l'ensemble I fini), notations $\sum_{i\in I} a_i$ et $\prod_{i\in I} a_i$, conventions $\sum_{i\in\varnothing} a_i = 0$ et $\prod_{i\in\varnothing} a_i = 1$
- Sommes usuelles $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, sommes et produits télescopiques
- Opérations élémentaires avec des $\sum$ et des $\prod$, "relation de Chasles",
- Changement d'indice dans une somme, symétrisation
- Factorisation de $a^n - b^n$, somme géométrique $\sum_{k=0}^{n} x^k$ et plus généralement $\sum_{k=m}^{n} q^k$ avec $q \in \mathbb{R}$.

Les calculs de produits, sous quelque forme que ce soit, ne sont pas au programme cette semaine.

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres **1 à 3**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Inégalités triangulaires Chapitre 3, Théorème 3.6
2. Sommes usuelles : on donnera les formules de $\sum_{k=1}^{n} k$ et de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ mais on ne démontrera que la première. De plus, on devra compléter une formule de télescopage donnée par l'examinateur, par exemple : $\sum_{k=m}^{n}(x_{k+1} - x_k) = \ldots\ldots$ ou encore $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \ldots\ldots$ Chapitre 4, Théorème 4.7 et une application du Théorème 4.8
3. Formule de factorisation de $a^n - b^n$ et de la somme géométrique $\sum_{k=0}^{n} x^k$ Chapitre 4, Théorème 4.12 et 4.13

Questions Flash au programme :

Chapitre 3 :

- Compléter : $\forall a \in \dots \quad \sqrt{a^2} = \dots$ et $\forall a \in \dots \quad \sqrt{a}^2 = \dots$
- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $a^2 \leq b^2$?
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$?
- Si $a \leq b$, à quelle condition sur a et b peut-on en déduire $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$?
- Soit x et y deux réels et k un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :
$$\lfloor x+y \rfloor = \dots \qquad \lfloor x+k \rfloor = \dots \qquad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$

Chapitre 2 :

- Quels sont les éléments de $[\![-4,2]\!]$? Et de $[-4,2]$?
- Si $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi]$, que peut-on dire de a et de b ?
- Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}(\{1,2\})$, i.e. l'ensemble des parties de $\{1,2\}$.
- Quelle est la caractérisation de $x \in A \cap B$? de $x \in A \cup B$?
- Compléter les formules suivantes : $\overline{A \cap B} = ...$ et $\overline{A \cup B} = ...$
- Sous quelle condition est-ce que des ensembles $A_1, \cdots, A_n$ sont-ils disjoints deux à deux ?
- Compléter : les ensembles $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition de E si $A_1, \cdots, A_n$ sont .... , disjoints deux à deux et si ....

Chapitre 1 :

- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de "$P \implies Q$".
- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de "P ou Q".
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une caractérisation de "n est impair" en termes de quantificateurs.
- Donner la négation de l'assertion suivante : ... (au choix de l'examinateur).
- Qu'appelle-t-on la contraposée de l'assertion "$P \implies Q$" ?
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initalisation et pour l'hérédité.
- Même question que ci-dessus pour la récurrence forte.
- Quel raisonnement utiliseriez-vous pour démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ?